Prof. Dr. C. W. Cryer

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 1 , Abgabe: 30.04.98 , 13.00 Uhr

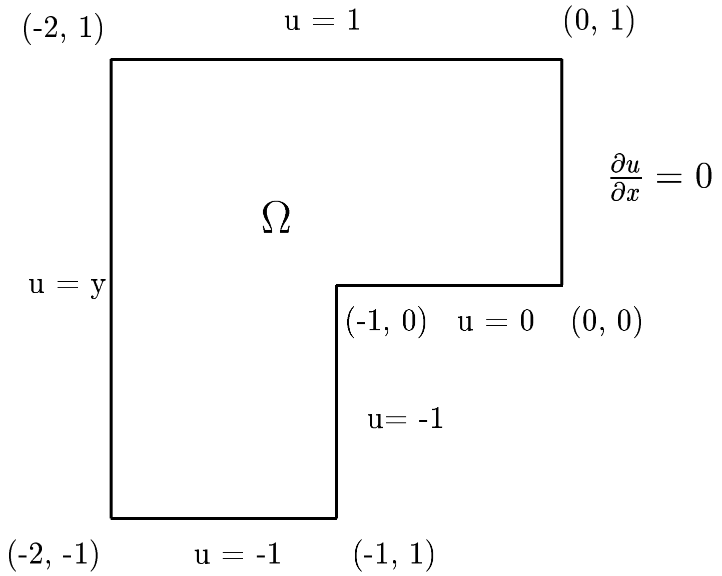
Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand, sei $n \in \mathbb{N}$ und $u \in \varphi^2(\bar{\Omega})$.

Zeigen Sie:
Gilt $\Delta u = u^{2n+1}$ mit $u_{|\Gamma} = 0$, dann ist $u \equiv 0$ in Ω.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (s. Abb.) soll die Laplacegleichung

$$\Delta u = 0$$

mit den in der Abbildung angegebenen Randwerten gelöst werden.



a) Bestimmen Sie eine Lösung. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, daß die Lösung eindeutig ist. (3 Punkte)

Aufgabe 3: (Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand, $\underline{u} := (u_1, ..., u_d)$ mit $u_i \in \varphi^2(\bar{\Omega})$, $i = 1, ..., d$, sei $p \in \varphi^1(\bar{\Omega})$ und sei $f \in \varphi(\Omega)$. Die stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\nu\Delta\underline{u} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} + \Delta p & = & f \\ div\underline{u} & = & 0 \end{array} \right\} \text{ in } \Omega \tag{1}$$

$$\underline{u} = 0 \qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega$$

beschreiben ein Modell für die Strömung eines homogenen, inkompressiblen, viskosen Fluids. Dabei beschreibt $\underline{u} = (u_1, ..., u_d)$ den Geschwindigkeitsvektor und p den (skularen) Druck des Fluids. Die Randbedingungen schreiben vor, daß die Flüssigkeit am Rand ruht. Die Viskosität wird durch $\nu > 0$ beschrieben.

Zeigen Sie, daß die Gleichungen (1) ein gleichmäßig Miptischess System im Sinne der Agmon-Douglis-Nirenberg Theorie bilden.

Hinweis:

$$(\underline{u}\cdot\delta)\underline{u} = \sum_{i=1}^{d} u_i \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial u_d}{\partial x_i}\right)$$

Aufgabe 4: (Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, sternförmiges Gebiet. Die stationären Eulerschen Bewegungsgleichungen eines inkompressiblen Fluids vereinfachen sich bei einer wirbelfreien Strömung zu

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \Delta U = 0 \\ \text{ii) } p + \frac{1}{2}\varphi\nabla U\cdot\nabla U + \varphi G = 0 \end{array} \right\} \quad \text{in } \Omega$$

Dabei ist U die Strömungsfunktion aus der sich der Geschwindigkeitsvektor $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ durch $\underline{u} = \nabla U$ ergibt. Der Druck wird durch p beschrieben, die Dichte duch φ und das Gravitationspotential durch G.

Zeigen Sie, daß bei einer solchen Strömung der minimale Druck immer auf dem Rand angenommen wird.

Hinweis:
Wenden Sie den Laplaceoperator auf (ii) an und benutzen Sie das Maximumprinzip. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß $\Delta G = 0$ ist.

a) Ein Fluid ist inkompressibel, wenn $div\underline{u} = 0$
$(div\underline{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i})$

b) Eine Strömung heißt wirbelfrei, wenn $rot\underline{u} = 0$
$(rot\underline{u} = (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}))$

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 2 , Abgabe: 07.05.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Betrachten Sie die Laplace-Gleichung auf $\Omega = (0,3) \times (0,3)$ mit den Randbedingungen

$$\begin{array}{lll} u = x^2 & \text{für} \quad 0 \le x \le 3 & , \quad y = 0 \\ u = 9 - y^2 & \text{für} \quad x = 3 & , \quad 0 \le y \le 3 \\ u = x^2 - 9 & \text{für} \quad 0 \le x \le 3 & , \quad y = 3 \\ u = -y^2 & \text{für} \quad x = 0 & , \quad 0 \le y \le 3 \end{array}$$

Stellen Sie für $h = 1$ die Finite-Differenzengleichungen auf und berechnen Sie daraus eine numerische Lösung sowie den absoluten Fehler dieser Lösung in den 4 inneren Gitterpunkten.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Auf dem Gebiet $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ soll die Laplace- Gleichung mit den Randbedingungen

$$\begin{array}{lll} u = -1 & \text{für} \quad -1 < x < 0 & , \quad y = 0 \\ u = 1 & \text{für} \quad 0 < x < 1 & , \quad y = 0 \\ u = 0 & \text{für} \quad -1 < x < 1 & , \quad y = 1 \\ u = y - 1 & \text{für} \quad x = -1 & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 = 1 - y & \text{für} \quad x = 1 & , \quad 0 < y < 1 \end{array}$$

gelöst werden.

a) Benutzen Sie die Funktion

$$w(x,y) := \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{y}$$

um zu zeigen, daß das RWP eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ besitzt.

b) Zeigen Sie, daß $\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ (x,y)\in\Omega}} u(x,y)$ nicht existiert.

c) Zur numerischen Lösung des RWP mit der 5-Punkte- Differenzenapproximation Δ_h benötigen Sie den Randwert $u(0,0)$. Geben Sie diesen so vor, daß der lokale Diskretisierungsfehler $(\Delta - \Delta_h)u$ im Punkt $(0,h)$ verschwindet.

Aufgabe 7: (2 Punkte)
Finden Sie $u \in C^4(\bar{\Omega})$ mit $\nabla^4 u = 0$ in einem Gebiet Ω, so daß u ein inneres Minimum oder Maximum in Ω hat!

Hinweis: Betrachten Sie quadratische Funktionen in (x, y).

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß das Problem

$$\begin{array}{rcll} u_{xx} + u_{yy} - \mathrm{e}^u & = & f & \quad \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \quad \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

höchstens eine Lösung u hat, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

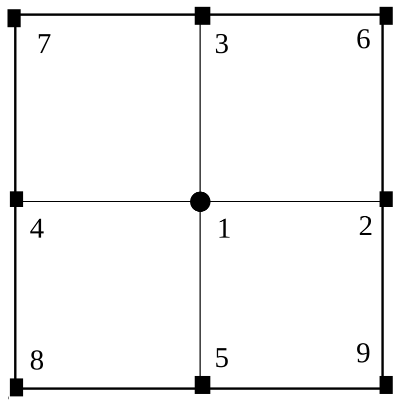
Übungsblatt 3 , Abgabe: 14.05.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1)^2$ und $h = 1/2$. Betrachten Sie die Diskretisierung des Neumann Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

durch finite Differenzen mit der Schnittweite h.

Stellen Sie die Differenzengleichung für $u(P_9)$ auf, wobei P_9 durch folgende Abbildung gegeben ist ($i \hat{=} P_i, i = 1, ..., 9$)



Aufgabe 10: (4 Punkte)
Benutzen Sie die Bezeichnungen aus Kap. 3.5 des Vorlesungsskripts. Sei R eine zusammenhängende Teilmenge von S. Zeigen Sie:

a) Sei $f \leq 0$, $lv \geq 0$ in R und $\partial R \neq \emptyset$.
Dann gilt:
$$v \leq \max\{0, \max_{\partial R} v\}$$

b) Sei $mv \geq 0$ in R und v nehme auf $\bar{R}$ sein Maximum in einem Punkt $P_0 \in \partial R$ an. Dann ist entweder $v \equiv const$ oder $v(P_0) - v(P) > 0$ für $P \in R$.

c) Sei $f \leq 0$ und $lv \geq 0$ in R und v nehme das Maximum auf $\bar{R}$ in $P_0 \in \partial R$ an. Ist das Maximum positiv, so ist entweder $v \equiv const$ oder $v(P_0) - v(P) > 0$ für $P \in R$.

Aufgabe 11: (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so daß $\rho(A) = 1$ mit $\rho(A)$ Spektralradius von A. Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß ein $x \in \mathbb{R}^2$ existiert mit

$$||Ax|| > ||x||.$$

Aufgabe 12: (4 Punkte)

Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Sei $f \in C^2(\bar{\Omega})$ und u die Lösung der RWA $u'' = f$ in Ω, $u(0) = u(1) = 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{(n+1/2)}$, $x_i := ih$, $0 \leq i \leq n$, $x_{n+1} := 1$. Sei $v \in \mathbb{R}^{n+2}, m$ der Differenzenoperator

$$mv_i := \frac{v_{i+1} + v_{i-1} - 2v_i}{h^2}, \qquad 1 \leq i < n \tag{1}$$

$$mv_n := \frac{\frac{8}{3}v_{n+1} + \frac{4}{3}v_{n-1} - 4v_n}{h^2} \tag{2}$$

Sei $u^h \in \mathbb{R}^{n+2}$ die Lösung der Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} mu_i^h &= f(x_i), \qquad 1 \leq i \leq n \\ u_0^h &= u_{n+1}^h = 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie,

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |u_i^h - u(x_i)| \leq \frac{1}{16} h^3 \max_{x \in \bar{\Omega}} |u^{(3)}(x)| + \frac{h^2}{24} \max_{x \in \bar{\Omega}} |u^{(4)}(x)|$$

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 4 , Abgabe: 20.05.98 , 18.00 Uhr

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Sei $A = D - L - R$ eine positiv definite, symmetrische Matrix und

$$S(\omega) := (D - \omega R)^{-1}((1-\omega)D + \omega L)(D - \omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega R)$$

die zugehörige SSOR-Matrix.

Zeigen Sie, daß $S(\omega)$ ähnlich zu einer positiv semi-definiten, symmetrischen Matrix ist.

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Die Diskretisierung des Neumann-Problems

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{in } \Omega := (0,1)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & g & \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

durch finite Differenzen auf einem $n \times n$ Gitter Ω_h führt auf folgendes Gleichungssystem

$$A_h u_h = f_h \tag{1}$$

mit

$$A_n = \begin{bmatrix} T & -2I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & & & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & & -I & T & -I \\ & & & -2I & T \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & & & \\ & & & & O \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & O & & & \\ & & & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

wobei $T, I \in Mat(n,n)$, $I =$ Einheitsmatrix und u_h, f_h wie in der Vorlesung definiert.

a) Die Matrix A_h ist nicht symmetrisch. Finden Sie eine Matrix D_h, s.d. $D_h A_h$ symmetrisch ist. Wie muß nun das Gleichungssystem aussehen, um dieselbe Lösung u_h wie in (1) zu erhalten?

b) Sei $e := (1, 1, ...1)^t \in \mathbb{R}^n$ und D_h wie in a).

Zeigen Sie:
i) Das Gleichungssystem (1) ist genau dann lösbar, wenn $e^t D_h f_h = 0$ gilt.

ii) Je zwei Lösungen können sich nur um eine Konstante unterscheiden.

Hinweis:
Wählen Sie einen beliebigen, aber festen Punkt $x_0 \in \Omega_h$ und konstruieren sie die Matrix $\hat{A}_h$ aus $D_h A_h$ durch Streichen der zu x_0 gehörigen Spalte und Zeile. Sie dürfen als bekannt voraussetzen, daß $\hat{A}_h$ eine symmetrische, reguläre Matrix ist. Zeigen Sie zunächst ii) und dann i).

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Eine Möglichkeit das Gleichungssystem (1) aus Aufgabe 14 zu lösen, ergibt sich durch die Verwendung eines Lagrangeschen Multiplikators $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} D_h A_h & e \\ e^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_h \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_h f_h \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dabei sei e wie in Aufgabe 14.
Zeigen Sie:

a) Das so erweiterte Gleichungssystem ist stets lösbar.

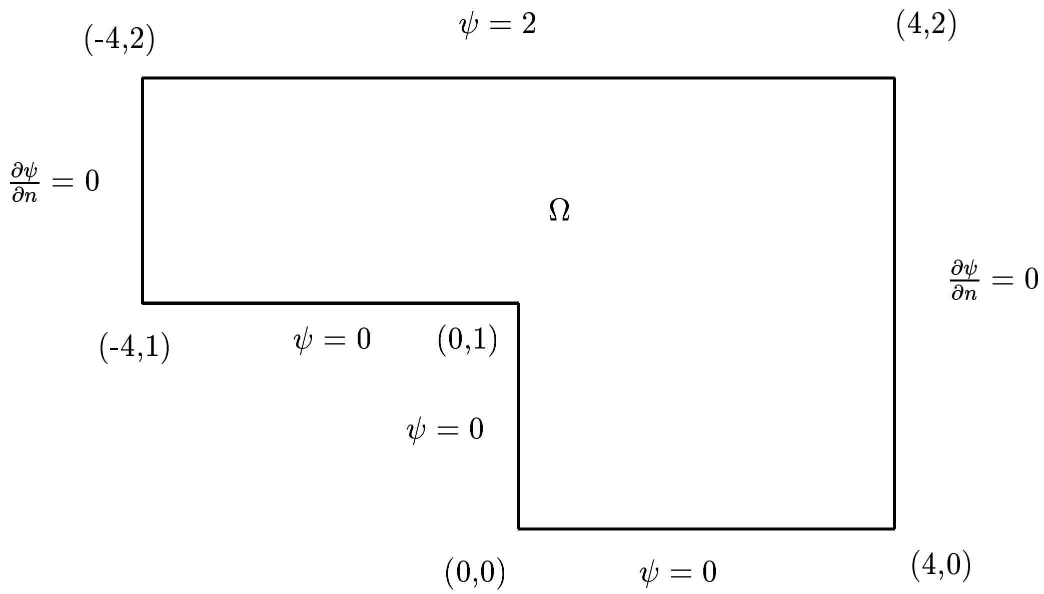
b) Sei u_h eine Lösung des Gleichungssystems (1) aus Aufgabe 14. Wie sieht die zugehörige Lösung des erweiterten Gleichungssystems aus?

   Betrachten sie nun das erweiterte Gleichungssystem und geben Sie ein $\lambda \in \mathbb{R}$ an, so daß dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 16: (4 Punkte)
(Programmieraufgabe, Abgabe 28.5.98, 13.00 Uhr)
Betrachten Sie die Potentialgleichung

$$\Delta\psi = 0$$

auf folgendem Gebiet Ω mit den gegebenen Randwerten:



Lösen Sie dieses Problem numerisch mit finiten Differenzen für die Gitterschrittweiten $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$. Geben Sie die Lösung für die Punkte $(x, y) \in \{(-4, 3/2), (0, 3/2), (2, 1), (4, 1)\}$ an.

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 5 , Abgabe: 28.05.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Sei $A = D - L - R$ eine reguläre Aufspaltung der Matrix A. Die Iterationsmatrix des symmetrischen Gauß-Seidel-Verfahrens lautet:

$$M_{SGS} := (D-R)^{-1}L(D-L)^{-1}R$$

a) Geben Sie die Matrix B_{SGS} an, s.d.

$$M_{SGS} = I - B_{SGS}A$$

gilt.

b) Sei A symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie, daß dann auch B_{SGS} symmetrisch positiv definit ist.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren, für welche das Jacobi-Verfahren?

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Die gemischte Randwertaufgabe $-\Delta u = f$ in $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_1(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ u_n(x,1) &= g_1(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) &= f_2(y), \quad 0 \le y \le 1 \\ u_n(1,y) &= g_2(y), \quad 0 \le y \le 1 \end{aligned} \tag{1}$$

wird auf einem Gitter (x_i, y_j)

$$\begin{aligned} x_i = ih, &\quad 0 \le i \le N \\ y_j = jh, &\quad 0 \le j \le N \end{aligned}$$

mit dem 5-Punkt-Stern approximiert und es sei $h = 1/N$. Weiterhin seien A_h bzw. f_h die zugehörige Diskretisierungsmatrix bzw. der zugehörige Diskretisierungsvektor. Die N^2 unbekannten Werte $u^h_{i,j}, 1 \le i,j \le N$, erfüllen dann die Gleichung

$$A_h u^h = f^h \tag{2}$$

a) Zeigen Sie: Die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Problems (1) sind

$$\lambda^{k,l} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{(2l-1)\pi}{2}\right)^2,$$

$$u^{k,l}(x,y) = \sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}\sin\frac{(2l-1)\pi y}{2},$$

für $k, l \in \mathbb{N}_+$.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda^{k,l}$ und Eigenvektoren $u_{i,j}^{k,l}$ der Matrix A_h.

c) Zeigen Sie, daß das SOR Verfahren mit $\omega \in (0,2)$ für die Gleichung (2) konvergiert.

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 6 , Abgabe: 10.06.1998 , 18.00 Uhr

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.
Zeigen Sie, daß für das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ u &= 1 \text{ in } (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

keine Lösung in $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ existiert.

Hinweis: Angenommen eine Lösung existiert. Zeigen Sie zunächst, daß diese Lösung rotationssymmetrisch sein muß. Beweisen Sie dann, daß rotationssymmetrische Lösungen der Potentialgleichung in 2D die folgende Form haben

$$u(r,\phi) = a \cdot log\, r + b$$

wobei, a, b Konstanten sind und (r,ϕ) Polarkoordinaten sind. Diese Lösungen hängen also nicht mehr von ϕ ab.

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < R < x^2 + y^2 < 1\}$ ein Kreisring. Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= 1 \text{ auf } \Gamma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R\} \end{aligned}$$

Wie verhalten sich die Lösungen für $R \to 0$?

Hinweis: Verwenden Sie die Rotationssymmetrie und benutzen Sie die Methode von der Trennung der Variablen.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Sei V ein linearer Raum und $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to R$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Weiterhin sei $f : V \to R$ ein lineares Funktional. Ein weiteres lineares Funktional $J : V \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$$

Zeigen Sie

(i)

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \Leftrightarrow a(u,v) = f(v) \ \forall v \in V$$

(ii) Es gibt höchstens eine Minimallösung.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Zeigen Sie, daß die Variationsformulierung

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial \nu} g d\sigma \ \forall v \in V$$

mit $V := \{v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ für das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}), g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, nicht immer lösbar ist, auch wenn für das klassische Dirichlet-Problem (1) eine Lösung existiert. Betrachten Sie dazu die Funktion

$$u(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} \cdot \frac{sin(n!\phi)}{n^2}$$

auf dem Einheitskreis $\Omega = K_1(0)$ wobei (r,ϕ) die entsprechenden Polarkoordinaten sind. Wählen Sie eine passende Randwertfunktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 7 , Abgabe: 18.06.1998 , 13.00 Uhr

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Aus der Vorlesung ist bekannt, daß für ein Intervall $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ gilt: $H^{1,2}(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Zeigen Sie: Für zweidimensionale Gebiete gilt diese Aussage nicht mehr. Betrachten Sie dazu die Funktion

$$u(x, y) := log\ log \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

auf dem Einheitskreis $K_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} & \text{für} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

ist in $C_0^\infty((-2, 2))$.
Konstruieren Sie mit Hilfe von $u(x)$ eine Funktion $u_d(x)$, die in $C_0^\infty((-2, 2)^d)$ liegt mit $d \geq 2$ beliebig.

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet mit genügend glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Für festes $f \in C^\infty(\Gamma)$ definieren wir

$$||f||_{H^{1/2}(\Gamma)} := \inf_{\substack{u \in H^{1,2}(\Omega) \\ u/_\Gamma = f}} \{||u||_{H^{1,2}(\Omega)}\}$$

Zeigen Sie:
$||\cdot||_{H^{1/2}(\Omega)}$ ist eine Norm auf $C^\infty(\Gamma)$

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 8 , Abgabe: 25.06.1998 , 13.00 Uhr

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Auf das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -a_1 u_{x_1x_1} - a_2 u_{x_2x_2} &= f \text{ in } \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten a_1 und a_2 wende man das Galerkin-Verfahren an. Dabei sollen als Ansatzraum $V_h \subset C(\bar{\Omega})$ stückweise bilineare Funktionen auf einer gleichmäßigen Zerlegung von Ω in Quadrate der Seitenlänge $h = \frac{1}{n+1}$ verwendet werden. (D.h. Funktionen $v_h \in V_h$ haben auf jedem Teilquadrat die Gestalt $v_h(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2$.) Man stelle die Steifigkeitsmatrix A bezüglich der zugehörigen Knotenbasis auf.

(Hinweis: Man verwende die Eigenschaft, daß sich jede Basisfunktion als $\Phi_{(\nu_1\nu_2)}(x_1, x_2) = \hat{\Phi}_{\nu_1}(x_1)\Phi_{v_2}(x_2)$ schreiben läßt, wobei Φ_ν eindimensionale stückweise lineare Basisfunktionen sind.)

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Gegeben sei das Randwertproblem

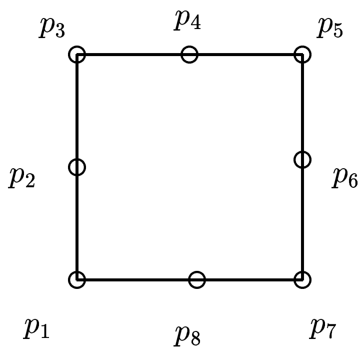
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_0 \subset \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \text{ auf } \Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ ein Lipschitz-Gebiet ist. Leiten Sie eine Variationsformulierung her. Spezifizieren Sie dazu die notwendigen Räume V, V_f, V_g, s.d.

$$a(u, v) = F(v)\ \forall v \in V$$

und $u \in V, f \in V_f, g \in V_g$ gilt.

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Für die quadratischen Elemente der Serendipity-Klasse (in $\mathbb{R}^2$) werden Polynome in 8 Punkten $p_i, i = 1, ..., 8$ ausgewertet (s. Fig.)



Der zugehörige Polynomraum ist

$$\mathcal{P} = span\{1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2\}$$

Zeigen Sie, daß jedes Polynom aus P eindeutig bestimmt ist durch seine Werte in den Punkten $p_i, i = 1, ..., 8$.

<u>Hinweis:</u> Legen sie den Ursprung in den Mittelpunkt des Elements und geben Sie eine Basis an, bei der die Basisfunktionen N_j in $p_i, i = 1, ..., 8$ die Werte $\delta_{i,j}$ annehmen (sog. Formfunktionen).

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand.

Zeigen Sie, daß die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} u D_i v dx = -\int_{\Omega} D_i u v dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot v \cdot \nu_i d\sigma$$

für $u, v \in H^{1,2}(\Omega)$ und $i = 1, ..., d$ gilt. Dabei sei $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ (schwache Ableitung) und $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d)$ der äußere Normalenvektor.